2.6 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Διαδοχικά διανύσματα : Είναι τα διανύσματα στα οποία το πέρας ενός είναι αρχή του επόμενου

2.

Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων : Είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.

3.

Άθροισμα δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή

Είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρές τα ΟΑ και ΟΒ και έχει αρχή την κοινή αρχή Ο των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

4.

Διαφορά δύο διανυσμάτων

Διαφορά του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ (γράφουμε $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$) ονομάζουμε το διάνυσμα που προκύπτει αν στο $\vec{\alpha}$ προσθέσουμε το αντίθετο ου $\vec{\beta}$.

Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta} = \vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

5.

Διαφορά δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή

Η διαφορά $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ είναι ίση με διάνυσμα που έχει **αρχή το πέρας** του δεύτερου διανύσματος και **πέρας το πέρας** του πρώτου. Δηλαδή $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

6.

Μηδενικό διάνυσμα : Είναι το διάνυσμα του οποίου τα άκρα συμπίπτουν
Το μηδενικό διάνυσμα το συμβολίζουμε με $\vec{0}$
Έτσι λοιπόν είναι $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ κ. λ. π

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Σχηματισμός αθροίσματος δύο διανυσμάτων

Καθιστούμε τα διανύσματα διαδοχικά και εφαρμόζουμε το 2 της θεωρίας , ή τα καθιστούμε με κοινή αρχή και εφαρμόζουμε το 3 της θεωρίας

2.

Σχηματισμός διαφοράς δύο διανυσμάτων

Προσθέτω στο $\vec{\alpha}$ το αντίθετο του $\vec{\beta}$, ή
τα καθιστούμε με κοινή αρχή και εφαρμόζουμε το 5 της θεωρίας .

3.

Άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων

Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι το $\vec{0}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2-6

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

2.

Για ένα εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ δείξτε ότι

$$\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} = \vec{0}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} =$$
$$(\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_5P_1}) + (\overrightarrow{P_2P_4} + + \overrightarrow{P_4P_6} + + \overrightarrow{P_6P_2}) =$$
$$= \overrightarrow{P_1P_1} + \overrightarrow{P_2P_2} =$$
$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

3.

Αν Α , Β , Γ , Δ τέσσερα σημεία και Ο το μέσο του ΑΓ , να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Προτεινόμενη λύση

Εκφράζουμε τα διανύσματα με αρχή το Ο

Ο μέσο του ΑΓ άρα $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{O\Gamma}$ **(1)**

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Delta}) =$$
$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} \overset{(1)}{=}$$
$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$$

4.

Αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$, να δείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 5

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$ άρα $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma E}$

ΔΒ = ΓΕ και ΒΔ // ΓΕ

ΒΔΓΕ παραλληλόγραμμο

5.

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Μ. Τι συμπεραίνετε για το ΑΒΓΔ, αν ισχύει

α) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{MB}$

β) $\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{M\Delta}\right|$

γ) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{MB}$ και $\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{M\Delta}\right|$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{MB}$ άρα $\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$

ΔΓ = ΑΒ και ΔΓ // ΑΒ

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

β)

$\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{M\Delta}\right|$ άρα $\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta B}\right|$

ΑΓ = ΒΔ ίσες διαγώνιες

γ)

Είναι ο συνδυασμός των (α) και (β), οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες, συνεπώς είναι ορθογώνιο

6.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, αν Δ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ, δείξτε ότι

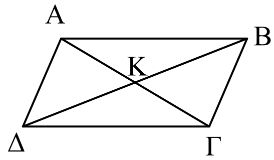
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$

7.

Στο διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , να εκφράσετε με ένα διάνυσμα τα εξαγόμενα



α) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}$ **β)** $\overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{BK}$ **γ)** $\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{K\Gamma}$

δ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **ε)** $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$ **στ)** $\overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Gamma B}$

ζ) $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}$ **η)** $\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **θ)** $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ι) $\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Gamma B}$

Προτεινόμενη λύση

α) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB}$

β) $\overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

γ) $\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$

δ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

ε) $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma A}$

στ) $\overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Delta A} = \vec{0}$

ζ) $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Delta}$

η) $\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$

θ) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB}$

ι) $\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$

8.

Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, δείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ ισχύει

α) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma}$ **β)** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta M} = \vec{0}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma}$ αρκεί να είναι $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{M\Delta}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ που ισχύει αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

β)

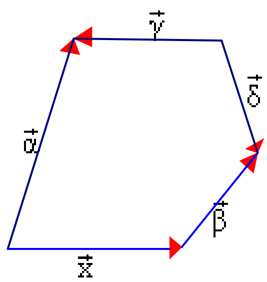
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta M} = \vec{0}$ αρκεί να είναι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = -\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{\Delta M}$

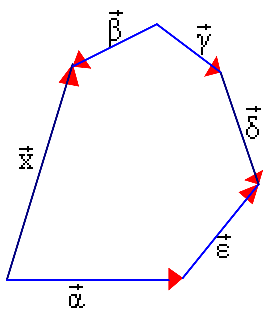
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta}$

που ισχύει λόγω του (α)

9.

Στα διπλανά σχήματα να βρείτε το $\vec{x}$





Προτεινόμενη λύση

Στο αριστερά σχήμα είναι

$\vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\gamma}) + \vec{\delta} + (-\vec{\beta})$

$= \vec{\alpha} - \vec{\gamma} + \vec{\delta} - \vec{\beta}$

Στο δεξιά σχήμα

$\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\varepsilon} + (-\vec{\delta}) + (-\vec{\gamma}) + \vec{\beta} =$

$= \vec{\alpha} + \vec{\varepsilon} - \vec{\delta} - \vec{\gamma} + \vec{\beta}$

10.

Αν Α , Β , Γ , Δ είναι τέσσερα τυχαία σημεία , να συμπληρώσετε τις ισότητες

α) $\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} = ...$ **β)** $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΒ} = ..$

γ) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \dots$ **δ)** $\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ} = \dots$

ε) $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \dots$ **στ)** $\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΓΔ}$

ζ) $\overrightarrow{ΓΒ} - \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΔ} = \dots$ **η)** $\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} = \dots$

θ) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ} - \overrightarrow{ΑΓ} = \dots$

Προτεινόμενη λύση

α)
$\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΑΓ}$

β)
$\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΒ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΑΔ}$

γ)
$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΔ}$

δ)
$\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΒΓ}$

ε)
$\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΑΓ}$

στ)
$\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} = \overrightarrow{ΑΒ}$

ζ)
$\overrightarrow{ΓΒ} - \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΔΑ} = \overrightarrow{ΓΑ}$

η)
$\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΑΑ} = \vec{0}$

θ)
$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ} - \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΓΑ} = \overrightarrow{ΑΑ} = \vec{0}$

11.

Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Ρ, Μ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΡ} + \overrightarrow{ΑΜ}$,
να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΡΓΜ είναι παραλληλόγραμμο

Προτεινόμενη λύση

$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΡ} + \overrightarrow{ΑΜ}$ άρα $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΡ} = \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΓ}$

$\overrightarrow{ΡΒ} = \overrightarrow{ΓΜ}$

ΡΒ = // ΓΜ

ΒΡΓΜ παραλληλόγραμμο

Πρέπει να απαλλα-
γούμε από το Α,
γι' αυτό δημιουργούμε
διαφορές με αρχή Α

12.

Αν για τα σημεία Α , Β , Γ , Δ , Ε ισχύει η σχέση $\overrightarrow{ΔΒ}-\overrightarrow{ΓΕ}=\overrightarrow{ΔΓ}-\overrightarrow{ΑΕ}$, να δείξτε ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.

Προτεινόμενη λύση

$\overrightarrow{ΔΒ}-\overrightarrow{ΓΕ}=\overrightarrow{ΔΓ}-\overrightarrow{ΑΕ}$ άρα $\overrightarrow{ΓΒ}-\overrightarrow{ΓΔ}-\overrightarrow{ΓΕ}=-\overrightarrow{ΓΔ}-(\overrightarrow{ΓΕ}-\overrightarrow{ΓΑ})$

$\overrightarrow{ΓΒ}-\overrightarrow{ΓΕ}=-\overrightarrow{ΓΕ}+\overrightarrow{ΓΑ}$

$\overrightarrow{ΕΒ}=\overrightarrow{ΓΑ}-\overrightarrow{ΓΕ}$

$\overrightarrow{ΕΒ}=\overrightarrow{ΕΑ}$ άρα τα Β , Α συμπίπτουν

Εκφράζουμε τα διανύσματα με τυχαία αρχή, έστω το Γ